Soit une série convergente $\sum u_n$ avec $u_n \geq 0$
Que dire de :

$$\sum \frac{u_n}{1-u_n} \qquad \sum \frac{u_n}{1+u_n} \qquad \sum \frac{u_n^2}{1+u_n^2}$$

1) $\sum u_n$ converge donc $\lim u_n = 0$. Comme $\lim \frac{1}{1-u_n} = 1$, il existe $N > 0$ tq $n > N \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1-u_n} < 2$, d'où :

$$0 \leq \frac{u_n}{1-u_n} < 2u_n$$

et $\sum \frac{u_n}{1-u_n}$ convergera.

2) On a $\frac{u_n}{1+u_n} \leq u_n$ pour tout n, et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ convergera.

3) On a encore $\frac{u_n^2}{1+u_n^2} \leq u_n^2 \leq u_n$ dès que $u_n \leq 1$, d'où la convergence de la série proposée.

(Réf. Hallak & Kallal)

Séries

Etudier les séries de termes généraux :

$$u_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^n \qquad u_n = \left(\frac{1}{\ln n}\right)^n \qquad u_n = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

* $\lim\limits_{n \to +\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ et $\sum \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^n$ diverge.

* $\frac{1}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln 3} < \frac{1}{\ln e} = 1$ donc $\sum \left(\frac{1}{\ln n}\right)^n$ converge

* On a $t^3 \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{(1+t^3)^n} \geqslant \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, donc :

$$u_n \geqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \frac{dt}{(1+t^3)^n} \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

et comme $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \sim \frac{1}{e \cdot \sqrt[3]{n}}$, on déduit : $\sum u_n$ diverge.

Etude de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n+\sin n}$

$$\frac{\sin n}{n+\sin n} = \frac{\sin n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\sin n}{n}}\right) = \frac{\sin n}{n} - \frac{\sin^2 n}{n^2} + o\left(\frac{\sin^2 n}{n^2}\right)$$

$\sum \frac{\sin n}{n}$ converge d'après la regle d'ABEL

$\sum \frac{\sin^2 n}{n^2}$ converge absolument car $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

Enfin $-\frac{\sin^2 n}{n^2} + o\left(\frac{\sin^2 n}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\sin^2 x}{n^2}$ et gardent des signes constants, donc

$$\sum\left(-\frac{\sin^2 n}{n^2} + o\left(\frac{\sin^2 n}{n^2}\right)\right) \quad \text{converge}$$

Ccl : La serie proposée converge.

(Hallak & Kallal)

Si u_{np}, $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, désignent des nbres réels positifs, montrer que :

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{p\geq 0} u_{np} = \sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0} u_{np} \quad \text{dans } \overline{\mathbb{R}}_+ .$$

Vérifier aussi que si l'une de ces 2 sommes converge dans $\mathbb{R}_+$, l'autre somme converge vers la même limite.

Si $\sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0} u_{np}$ converge, on a :

$$\forall P,N \quad \underbrace{\sum_{p=0}^{P}\sum_{n=0}^{N} u_{np}}_{=\sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{P} u_{np}} \leq \sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0} u_{np}$$

Faisons tendre P vers $+\infty$ dans cette inégalité :

$$\forall N \quad \sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{\infty} u_{np} \leq \sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0} u_{np} < \infty$$

ce qui prouve que $\sum_n\sum_p$ converge et que $\sum_{n\geq 0}\sum_{p\geq 0} u_{np} \leq \sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0} u_{np}$.

Il suffit de recommencer de la même manière dans l'autre sens pour conclure à $\sum_n\sum_p u_{np} = \sum_p\sum_n u_{np}$.

CQFD

NB : Le résultat suivant est une généralisation (réf. RMS 90/91 n°6560 p 107)

Soit $(u_{n,k})_{n,k}$ une suite double à termes complexes vérifiant :

* $\forall n \ \sum_{k\in\mathbb{N}} |u_{n,k}|$ converge
* $\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n$ est convergente (où $s_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} |u_{n,k}|$)

Alors les 2 membres de l'égalité ci-dessous ont un sens et sont égaux :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{nk}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{nk}\Big)$$

Etudier la convergence de la série :

$$\sum_{n\geq 0} \text{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\,\text{Arctg}\,n^2\right)$$

(réf. Serfati III.1.6)

Posons $u_n = \text{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\text{Arctg}\,n^2\right)$

* $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{Arctg}\,n^2 = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{u\to 1} \text{Arccos}\,u = 0$, donc la série peut converger à priori.

* $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctg}\,n^2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -1 < \frac{2}{\pi}\text{Arctg}\,n^2 < 1$ donc u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* On sait que : $\text{Arctg}\,x + \text{Arctg}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ $\forall x > 0$ (preuve : dériver!)

et que $\text{Arctg}\,x = x + o(x)$ $(x\to 0)$, donc :

$$\text{Arctg}\,n^2 = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\,\frac{1}{n^2}$$
$$= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\frac{2}{\pi}\text{Arctg}\,n^2 = 1 - \frac{2}{\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où $u_n = \text{Arccos}\left(1 - \frac{2}{\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (*)

Mais $\left(\text{Arccos}(1-x)\right)' = -\frac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}\underbrace{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{1+\frac{x}{4}+o(x)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}} + o(x^{\frac{1}{2}})$$

entraine $\text{Arccos}(1-x) = \sqrt{2}\,x^{\frac{1}{2}} + o(x^{\frac{1}{2}})$

(*) donne alors :

$$u_n = \sqrt{2}\left(\frac{2}{\pi n^2}\right)^{1/2} + o\left(\left(\frac{2}{\pi n^2}\right)^{1/2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}.n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Soit : $\boxed{u_n \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}\,n} \quad (n\to+\infty)}$. La série divergera donc.

On sait que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Posons : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

a) En utilisant $\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}$ $(k \to +\infty)$, trouver un équivalent de $R_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer ensuite que $R_{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

c) Donner le développement limité de S_n à l'ordre 2 pour $n \to +\infty$, calculer S_{10}, S_{100}, S_{1000}, $S_{10\,000}$ grâce à un programme judicieux. Que dire ?

---

a) $\frac{1}{k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k(k+1)}$ entraîne $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ puisque la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente (Ramis IV 1.6.1.2°)

Comme $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n}$, on déduit $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$

b) Ainsi $R_{n-1} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, et on s'intéresse à $R_{n-1} - \frac{1}{n}$. On désire chercher un équivalent de

$$R_{n-1} - \frac{1}{n} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}$$

On a $\frac{1}{k^2(k+1)} \sim \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} \sim \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

et cette dernière somme se calcule facilement :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+2} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)}$$

(en effet :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+3} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+4} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+5} \\ \cdots \end{cases}$$

en sommant, tous les termes entourés disparaissent...)

Finalement :

$$R_{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\boxed{R_{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

c) $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = S_n + R_n$ donc $\boxed{S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ (*)

Programme : (Basic, sur PC-E500 Sharp)

```
5  INPUT N
10 U=0
15 FOR K=N TO 1 STEP -1
20 U=U+1/(K*K)
25 NEXT
30 PRINT "U(";N;")=";U
35 GOTO 5
```

Remarque : Le calcul de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ se fait en commençant par les plus petits termes, la somme de 2 "très petits" nombres s'effectuant pratiquement avec une précision infinie en virgule flottante. Procéder autrement provoquerait des erreurs d'arrondi importantes.

Résultats :

$S_{10} = 1,549767731$

$S_{100} = 1,6349839$

$S_{1000} = 1,643934567$

$S_{10000} = 1,644834072$

zones de chiffres exacts

A comparer avec :

$\frac{\pi^2}{6} \simeq 1,644934067$

Cela provient de (*). Ainsi pour S_{1000}, $S_{1000} \simeq \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{10^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^6} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

résultat cherché

1^e décimale fausse en 10^{-3}

2^e faute visible vers le 7^e chiffre après la virgule.

ordre de $\frac{1}{10^9}$ mais pour n grand...

• Prolongements : Majorer le reste R_n de $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$.

* (Ramis IV p 36) rappelle comment on peut majorer le reste R_n d'une série convergente. Dans le cas de la série $\sum \frac{1}{k^2}$, on a :

a) Première vision :

$\forall t \in [n, n+1]$ $$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

d'où $$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\,dt \leq \frac{1}{n^2}$$

d'où
$$\begin{cases} R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n} \\ \text{et} \\ \int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = R_n \end{cases}$$

Ainsi $$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}} \quad (*)$$

Conséquence : $$0 \leq S - \left(S_n + \frac{1}{n+1}\right) = R_n - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

et $S_n + \frac{1}{n+1}$ est une valeur approchée par défaut de S à $\frac{1}{n(n+1)}$ près.

b) Seconde vision : on peut obtenir les majorations (*) sans passer par des intégrations si l'on note que

$$\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

d'où $$\underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}}_{\underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}_{\frac{1}{n+1}}} \leq R_n \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}}_{\underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)}_{\frac{1}{n}}}$$

Mq la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$ est convergente et qu'elle admet pour somme $\ln 3$.

* $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n(n+3)}$ d'où la convergence de $\sum u_n$.

* $u_n = \ln \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$ d'où :

$$\begin{cases} u_1 = -\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 - \ln 4 \\ u_2 = -\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 - \ln 5 \\ u_3 = -\ln 3 + \ln 4 + \ln 5 - \ln 6 \\ u_4 = -\ln 4 + \ln 5 + \ln 6 - \ln 7 \\ \dots \\ u_n = -\ln n + \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(n+3) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \ln 3 + \ln(n+1) - \ln(n+3)$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \ln \frac{n+1}{n+3} = 0$, on obtient $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \ln 3$

2

<u>2^e solution :</u>

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -\sum_{k=1}^{n} \ln k + \sum_{1}^{n} \ln(k+1) + \sum_{1}^{n} \ln(k+2) - \sum_{1}^{n} \ln(k+3)$$

$$= -\sum_{k=2}^{n} \ln k + \sum_{2}^{n+1} \ln k + \sum_{3}^{n+2} \ln k - \sum_{4}^{n+3} \ln k$$

$$= \ln(n+1) + \ln 3 - \ln(n+3) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln 3.$$

(réf : 1^er exercice sur 5pt du partiel 89-90, Analyse M23 2^e année)

Exercice n°1 :

1)On considère la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ où u_1 est donné dans $\mathbb{R}_+^*$ et où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{k}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$

au voisinage de $+\infty$, avec $k \in \mathbb{R}$ et $\beta > 1$. Montrer l'existence d'un réel strictement positif l tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{l}{n^k}$. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ suivant les valeurs de k.

2) Etudier la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} u_n$ où

$$u_n = \frac{2.4....(2n-2)(2n)}{3.5....(2n-1)(2n+1)}$$

3) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} n!n^{-n}e^n$? Montrer aussi qu'il existe un réel positif l tel que $n! \sim l\sqrt{n}n^n e^{-n}$. (NB : On peut déterminer la valeur de la constante l en utilisant les intégrales de WALLIS. On trouve $l = \sqrt{2\pi}$, par exemple dans le Ramis IV p14)

1) $(n^k u_n)_n$ tend vers $l \in \mathbb{R}_+^*$ ssi $(\ln(n^k u_n))_n$ tend vers une limite dans $\mathbb{R}$. Cette dernière suite converge dans $\mathbb{R}$ ssi la série associée $\sum a_n$ avec $a_n = \ln(n+1)^k u_{n+1} - \ln n^k u_n$ converge. On a :

$$a_n = \ln\frac{(n+1)^k}{n^k} - \ln\frac{u_{n+1}}{u_n}$$
$$= k\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{k}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)$$

de sorte que

$$a_n = k\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{k}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$
$$= O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) \quad \text{où } \gamma = \mathrm{Min}(2,\beta)$$

et que la convergence de $\sum a_n$ soit acquise.

* $u_n \sim \frac{\ell}{n^k}$ donc $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^k}$ seront de m̂ nature. $\sum u_n$ convergera ssi $k>1$.

2) Posons $u_n = \frac{2 \dots 2n}{3 \dots (2n+1)}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3} = \frac{2n+2}{2n} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{2n}}$

soit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le 1) s'applique : $u_n \sim \frac{\ell}{\sqrt{n}}$ et $\sum u_n$ diverge.

3) On pose $u_n = n!\, n^{-n} e^n$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1) \cdot \frac{(n+1)^{-(n+1)}}{n^{-n}} \cdot \frac{e^{n+1}}{e^n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= e^{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après 1), il existe $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ tq $u_n \sim \frac{\ell}{n^{-\frac{1}{2}}} = \ell\sqrt{n}$, et

donc $n! \sim \ell\sqrt{n}\, n^n e^{-n}$.

<u>NB</u> : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$ est la formule de STIRLING

Nature de $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^\alpha}$?

Posons $u_n = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^\alpha}$

$u_n = e^{n^\alpha \ln \frac{n+1}{n+3}}$ et $\ln \frac{n+1}{n+3} = \ln\left(1 - \frac{2}{n+3}\right) \sim \frac{-2}{n+3}$ $(n \to +\infty)$

Donc $n^\alpha \ln \frac{n+1}{n+3} \sim \frac{-2n^\alpha}{n+3} \sim -2n^{\alpha-1}$ $(n \to +\infty)$ $(*)$

* <u>Si $\alpha < 1$,</u> $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1} = 0$ donc $-2n^{\alpha-1}$ est bornée. On applique le lemme :

<u>Lemme :</u> $\left.\begin{array}{l} a(n) \sim b(n) \\ b(n) \text{ borné} \end{array}\right\} \Rightarrow e^{a(n)} \sim e^{b(n)}$

soit : $u_n = e^{n^\alpha \ln \frac{n+1}{n+3}} \sim e^{-2n^{\alpha-1}}$

et $\lim u_n = \lim e^{-2n^{\alpha-1}} = 1$ (1)

La série $\sum u_n$ divergera.

* <u>Si $\alpha = 1$,</u> $(*)$ devient $n^\alpha \ln \frac{n+1}{n+3} \sim -2$ et le lemme précédent s'applique :

$u_n \sim e^{-2}$ (2)

donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{-2} \neq 0$ et $\sum u_n$ diverge.

* <u>Si $\alpha > 1$</u>, utilisons le critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^\alpha}\right)^{1/n} = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^{\alpha-1}} \begin{cases} \to 0 & \text{si } \alpha-1>1, \text{ d'après (3) ci-dessous} \\ \to e^{-2} < 1 & \text{si } \alpha-1=1, \text{ ie } \alpha=2 \text{ d'après (2)} \\ \to 1 & \text{si } \alpha-1<1, \text{ ie } \alpha<2, \text{ d'après (1)} \end{cases}$$

(3) $u_n = e^{n^\alpha \ln\left(1-\frac{2}{n+3}\right)} = e^{n^\alpha\left(-\frac{2}{n+3}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si $\alpha > 1$.

Ccl : $\sum u_n$ converge si $\alpha \geq 2$
diverge si $\alpha \leq 1$

* Que se passe-t-il lorsque $1 < \alpha < 2$?

Ramis ex cor. 5.4.1 p 207
5.4.2 p 208

1°/ Calculer $\sum_{k=1}^{p} \cotg^2 \frac{k\pi}{2p+1}$ et $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$

2°/ En utilisant $\cotg t < \frac{1}{t} < \frac{1}{\sin t}$ pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, en déduire que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3°/ En déduire $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \frac{\pi^2}{6}$

preuve : 1°/

De $(\cos x + i \sin x)^{2p+1} = \cos(2p+1)x + i \sin(2p+1)x$ on tire :

$$\sin(2p+1)x = \sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1} x \cos^{2(p-k)} x$$

et pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$:

$$\frac{\sin(2p+1)x}{\sin^{2p+1} x} = \sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{2k+1} (-1)^k \cotg^{2(p-k)} x$$

Les nombres $\cotg^2 \frac{k\pi}{2p+1}$ $(1 \leq k \leq p)$ seront donc les p racines du polynôme

$P(X) = \sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{2k+1} (-1)^k X^{p-k} = C_{2p+1}^{1} X^p - C_{2p+1}^{3} X^{p-1} + \ldots + (-1)^p$, d'où :

$$\sum_{k=1}^{p} \cotg^2 \frac{k\pi}{2p+1} = \frac{C_{2p+1}^3}{C_{2p+1}^1} = \frac{p(2p-1)}{3}$$

et aussi :

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}} = \sum_{k=1}^{p} 1 + \cotg^2 \frac{k\pi}{2p+1} = p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

2°/ Par sommation des inégalités proposées, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{p} \cotg^2 \frac{k\pi}{2p+1} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)^2} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$$

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}$$

$$\frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{2p^2 - p}{(2p+1)^2} < \sum \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{2p^2 + 2p}{(2p+1)^2}$$

Les bornes tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand $p \to +\infty$, donc $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

3°/ $t \mapsto f(t) = \dfrac{\ln t}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$ et :

$$\lim_{t \to 1_-} f(t) = 1 \qquad \lim_{t \to 0_+} \sqrt{t}\, f(t) = 0$$

assurent la convergence de $\int_0^1 f(t)\,dt$.

* De $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + \dots + t^{n-1} + \dfrac{t^n}{1-t}$ on déduit :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} = \sum_{k=0}^{n-1} -\int_0^1 t^k \ln t + \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{t-1} \qquad \text{(toutes ces int. conv.)}$$

Par intégration par parties et passage à la limite, on obtient pour $k \geq 0$:

$$\int_\varepsilon^1 t^k \ln t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln t \right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{t}\,dt$$

d'où $\int_0^1 t^k \ln t = -\dfrac{1}{(k+1)^2}$ et :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{t-1}$$

soit : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{t-1} \geq 0$

$g : t \mapsto \dfrac{t \ln t}{t-1}$ est prolongeable en une fct continue sur $[0,1)$ en posant $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, donc admet une Borne Supérieure sur $[0,1]$. Notons la M. Alors :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq M \int_0^1 t^{n-1}\,dt = \frac{M}{n}$$

<u>Ce qui prouve que</u> $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. □